אלגברה לינארית לפיזיקאים - תרגיל בית 4

1. נתונה מערכת המשוואות: $Ax = b$, כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ו $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת. כמה פתרונות יש? (התייחסו לערכי b_1, b_2).

ב. נניח כי $b_1 = k$, ו$b_2 = 2k$. נסמן את קבוצת ווקטורי הפתרונות כV (שימו לב, זו תת קבוצה של $\mathbb{R}^2$). הראו כי V מוגדרת באמצעות המשוואה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$ הוא סקלר כלשהו. (כלומר, לכל סקלר t שנבחר, כשנציב במשוואה לעיל, נקבל כי $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ הוא פתרון - איבר ששייך לקבוצה V).
ציירו את קבוצת הפתרונות עבור $k = 1$, עבור $k = 0$ ועבור $k = -2$ על גבי המישור הדו־מימדי (כאשר כרגיל, נתייחס לרכיב הראשון של $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ כרכיב לאורך ציר הx, ולרכיב השני כרכיב לאורך ציר הy).

ג. עבור המקרה $k = 1$, בחרו במפורש שני פתרונות כלשהם למערכת וציירו אותם על גבי המישור. כעת ציירו את הסכום שלהם. האם זהו גם פתרון? (הסבירו את תשובתכם באמצעות הציור). האם קבוצת הפתרונות במקרה זה היא תת מרחב לינארי?

ד. חזרו על סעיף ג', במקרה שבו $k = 0$.

ה. באופן כללי, מתי קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות מהצורה $Ax = b$ היא תת מרחב לינארי? הוכיחו זאת בהסתמך על הטענה שנלמדה בתרגול.

ו. בשאלה זו למעשה ראינו שלא כל תת קבוצה של המרחב $\mathbb{R}^2$ היא בהכרח תת מרחב. נסו לתת תיאור גיאומטרי איכותי (במילים, לא נדרשת הוכחה) לכל תתי המרחבים ב$\mathbb{R}^2$ שייתכנו (הפרידו למקרים שבהם המימד הוא 0, 1, או 2).

ז. (**רשות**) חזרו על סעיף ו. עבור $\mathbb{R}^3$ במקום $\mathbb{R}^2$ (הפרידו למקרים שבהם המימד הוא 0,1,2,3).

2. בתרגיל זה נכיר מרחב לינארי חשוב - מרחב הפולינומים מדרגה סופית כלשהי.
יהיה $\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה קטנה שווה מ־2. כלומר:

$$\mathbb{R}_2[x] = \left\{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

שימו לב: האיברים במרחב הזה הם <u>פונקציות</u> מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}$, אבל אנחנו נקרא להם <u>וקטורים</u> כי הם שייכים למרחב הוקטורי $\mathbb{R}_2[x]$.

א. בכל מרחב וקטורי קיים איבר אפס לפי ההגדרה. מהו איבר האפס במרחב $\mathbb{R}_2[x]$? רמז: הוא גם פונקציה כמו כל שאר האיברים במרחב - איך הפונקציה הזאת מוגדרת?

ב. הוכיחו כי מתקיימת לדוגמא תכונת הסגירות לחיבור.

ג. נתונים ארבעת הפולינומים הבאים:

$$P_1(x) = x^2 + x + 1, \quad P_2(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

$$P_3(x) = 3x^2 + 4x + 4, \quad , P_4(x) = x^2 + x$$

מצאו מקדמים כלשהם, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. כך ש:

$$\alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \alpha_3 P_3(x) = P_4(x)$$

רמז: השוויון מסמל שוויון של פונקציות, כלומר אנחנו מחפשים מקדמים כך שהמשוואה תתקיים לכל x (אל תנסו "למצוא" את x!). לפי ההגדרה, שני פולינומים הם שווים זה לזה אם"ם כל המקדמים שלהם שווים (כלומר, המקדם של x^2 של מה שכתוב משמאל שווה למקדם של x^2 של מה שכתוב מימין, וכנ"ל עבור המקדם של x, וכנ"ל עבור המקדם החופשי).
כלומר, מתוך השוויון הנ"ל אתם צריכים לקבל 3 משוואות בשלושה נעלמים ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$). ברגע שכתבתם את המשוואות, כתבו את המטריצה המתאימה ודרגו אותה בכדי לקבל את הפתרונות עבור $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

הערה: בעצם זה שכתבנו את המשוואות כמטריצה, למעשה **המרנו** את הבעיה ממרחב הפולינומים למרחב $\mathbb{R}^3$ ופתרנו אותה שם. האם תוכלו לחשוב על פעולה שממירה איברים מהמרחב $\mathbb{R}_2[x]$ למרחב $\mathbb{R}^3$?

3. ציירו את תתי המרחבים הבאים (אלא אם הם פשוט מרחב האפס או $\mathbb{R}^2$, ואז מספיק לציין זאת). מה המימד שלהם? (אין צורך בהוכחה עבור המימד – קבעו לפי האינטואיציה).

1) $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ 2) $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ 3) $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ 4) $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

5) $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ 6) $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0.00001\end{pmatrix}\right\}$ 7) $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2020\\0\end{pmatrix}\right\}$.

8) $Sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

9) $Sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

4. בשאלה הזאת נדבר על חיתוך, איחוד וסכום של מרחבים וקטורים.
טענה: אם V הוא מרחב וקטורי, וU, W הם תתי מרחבים של V, אז מתקיים כי: $U \cap W$ הוא גם תת־מרחב.

א. **(רשות)** הוכיחו את הטענה.

ב. מהו החיתוך של המרחבים $U = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $W = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$? (אין צורך להוכיח שום דבר, נמקו באופן איכותי או גאומטרי).

ג. מהו החיתוך של המרחבים $U = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $W = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$?

ד. נתבונן על המרחבים $U = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. האם האיחוד שלהם, $W \cup U$ הוא תת־מרחב לינארי?

רמז: לא. זה אומר שאו שאין סגירות לכפל בסקלר, או שאין סגירות ביחס לחיבור. מי מבינהן לא מתקיימות? ציירו את $W \cup U$ על גבי המישור והסבירו באמצעות דוגמא.

ה. בשיעור למדתם על פעולת ה"חיבור" של מרחבים וקטורים. תזכורת:

$$U+W=\{u+w \quad | \quad u\in U, w\in W\}$$

כלומר, קבוצת כל הקומבינציות האפשריות של איברים מU ומW. נניח כי $U=Sp\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $W=Sp\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ כמו בסעיף הקודם. מהו המרחב $U+W$?

<u>הערה</u>: באופן כללי, מתקיים כי:

$$Sp\{u_1,...,u_n\}+Sp\{w_1,...,w_m\}=Sp\{u_1,...,u_n,w_1,...,w_m\}$$

או במקרה שלנו, פשוט:

$$Sp\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)+Sp\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=Sp\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

5. תזכורת: קבוצת וקטורים $v_1,...,v_n$ תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל), אם למשוואה:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n=0$$

יש **רק** את פתרון האפס $\alpha_1=...=\alpha_n=0$, שנקרא גם הפתרון הטריוויאלי (כלומר, <u>שלא יתכן</u> שיש צרוף לינארי כלשהו נוסף עם מקדמים שאינם כולם אפסים, שמוביל לווקטור האפס). קבע האם כל אחת מהקבוצות הבאות היא תלויה לינארית או בלתי תלויה לינארית:

א. $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

ב. $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

ג. $v_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

ד. $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

ה. $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

במידה והקבוצה תלויה לינארית, מצאו צירוף לינארי <u>שאינו טריוויאלי</u> (כלומר, שלא כל המקדמים הם אפסים) שמוביל לאפס. בנוסף, אם הקבוצה תלויה לינארית (ומכילה יותר מוקטור בודד), הראו שאפשר להביע את אחד מהוקטורים כתלות בשאר (מצאו זאת באופן מפורש).

רמז: תמיד אפשר לכתוב צירוף לינארי כמערכת משוואות לינארית, להעביר למטריצה ולדרג כדי למצוא את המקדמים.

6. (**רשות**) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 2 מעל $\mathbb{R}$. נתון כי $A^3=\begin{pmatrix}5&-8\\-8&13\end{pmatrix}$ ו־$A^5=\begin{pmatrix}34&-55\\-55&89\end{pmatrix}$.

(א) הוכיחו כי A הפיכה.

(ב) מצאו את A.

(זו כנראה הייתה שאלה ממבחן, לא זוכר מאיזה פקולטה).